

**MATHEMATIK  
ABITUR 2022**

*GRUNDKURS*

---

**BERLIN UND BRANDENBURG**

**PRÜFUNGEN UND  
LÖSUNGEN**

# Inhalt

<b>Abitur 2021 (Musterklausur)</b>	<b>4</b>
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil . . . . .	4
1.1 Analysis 1 . . . . .	4
1.2 Analysis 2 . . . . .	4
1.3 Analysis 3 . . . . .	5
1.4 Alternative 1: Geometrie . . . . .	6
1.5 Alternative 2: Stochastik . . . . .	7
2 Analysis . . . . .	8
2.1 Analysis: Torbogen . . . . .	8
2.2 Analysis: Engelsflügel . . . . .	10
3 Analytische Geometrie oder Stochastik . . . . .	12
3.1 Geometrie: Veranstaltungszelt . . . . .	12
3.2 Stochastik: Gutschein-App . . . . .	13
<b>Abitur 2021 (Musterlösung)</b>	<b>14</b>
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil . . . . .	14
1.1 Analysis 1 . . . . .	14
1.2 Analysis 2 . . . . .	14
1.3 Analysis 3 . . . . .	15
1.4 Alternative 1: Geometrie . . . . .	16
1.5 Alternative 2: Stochastik . . . . .	17
2 Analysis . . . . .	19
2.1 Analysis: Torbogen . . . . .	19
2.2 Analysis: Engelsflügel . . . . .	26
3 Analytische Geometrie oder Stochastik . . . . .	32
3.1 Geometrie: Veranstaltungszelt . . . . .	32
3.2 Stochastik: Gutschein-App . . . . .	35
<b>Abitur 2020 (Musterklausur)</b>	<b>38</b>
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil . . . . .	38
1.1 Analysis 1 . . . . .	38
1.2 Analysis 2 . . . . .	38
1.3 Geometrie 1 . . . . .	38
1.4 Geometrie 2 . . . . .	38
1.5 Stochastik . . . . .	38
2 Analysis . . . . .	40
2.1 Analysis: Exponentialfunktion . . . . .	40
2.2 Analysis: Offroad-Strecke . . . . .	41
3 Analytische Geometrie . . . . .	42
3.1 Geometrie: Ebenengleichungen . . . . .	42
3.2 Geometrie: Pool . . . . .	43
4 Stochastik . . . . .	44

4.1	Stochastik: Farbige Würfel . . . . .	44
4.2	Stochastik: IT-Unternehmen . . . . .	45
<b>Abitur 2020 (Musterlösung)</b>		<b>46</b>
1	Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil . . . . .	46
1.1	Analysis 1 . . . . .	46
1.2	Analysis 2 . . . . .	46
1.3	Geometrie 1 . . . . .	47
1.4	Geometrie 2 . . . . .	48
1.5	Stochastik . . . . .	48
2	Analysis . . . . .	50
2.1	Analysis: Exponentialfunktion . . . . .	50
2.2	Analysis: Offroad-Strecke . . . . .	54
3	Analytische Geometrie . . . . .	58
3.1	Geometrie: Ebenengleichungen . . . . .	58
3.2	Geometrie: Pool . . . . .	61
4	Stochastik . . . . .	64
4.1	Stochastik: Farbige Würfel . . . . .	64
4.2	Stochastik: IT-Unternehmen . . . . .	66
<b>Abitur 2019 (Musterklausur)</b>		<b>68</b>
1	Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil . . . . .	68
1.1	Analysis 1 . . . . .	68
1.2	Analysis 2 . . . . .	68
1.3	Geometrie . . . . .	68
1.4	Stochastik . . . . .	68
2	Analysis . . . . .	70
2.1	Analysis: Hormontherapie . . . . .	70
2.2	Analysis: Bonsai-Bäume . . . . .	72
3	Analytische Geometrie . . . . .	74
3.1	Geometrie: Autobrücke . . . . .	74
3.2	Geometrie: Rechteck im Würfel . . . . .	75
4	Stochastik . . . . .	76
4.1	Stochastik: Würfeln um Hausarbeit . . . . .	76
4.2	Stochastik: Fahrscheinkontrolle . . . . .	77
<b>Abitur 2019 (Musterlösung)</b>		<b>78</b>
1	Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil . . . . .	78
1.1	Analysis 1 . . . . .	78
1.2	Analysis 2 . . . . .	78
1.3	Geometrie . . . . .	79
1.4	Stochastik . . . . .	81
2	Analysis . . . . .	82
2.1	Analysis: Hormontherapie . . . . .	82
2.2	Analysis: Bonsai-Bäume . . . . .	85
3	Analytische Geometrie . . . . .	90
3.1	Geometrie: Autobrücke . . . . .	90
3.2	Geometrie: Rechteck im Würfel . . . . .	93
4	Stochastik . . . . .	97
4.1	Stochastik: Würfeln um Hausarbeit . . . . .	97
4.2	Stochastik: Fahrscheinkontrolle . . . . .	99

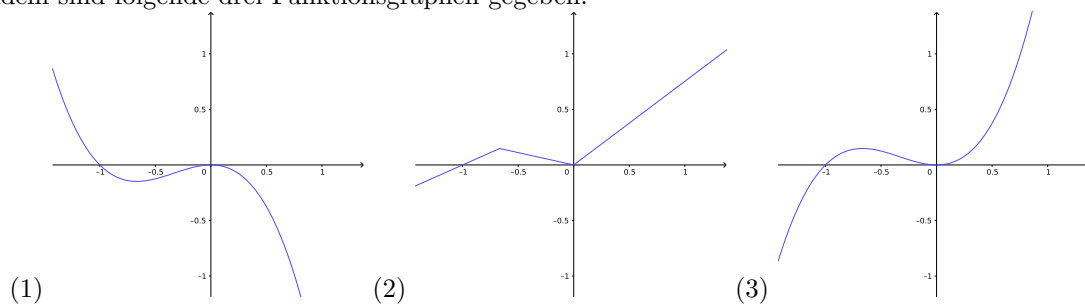
# Abitur 2021 (Musterklausur)

Im Abitur 2021 konnte die Lehrkraft zwischen Analytischer Geometrie und Stochastik wählen. Die entsprechenden Aufgaben des abgewählten Themengebietes entfielen. **Bearbeiten Sie die Aufgaben in Analysis und entweder die Aufgaben in Analytischer Geometrie oder die in Stochastik.**

## 1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

### 1.1 Analysis 1

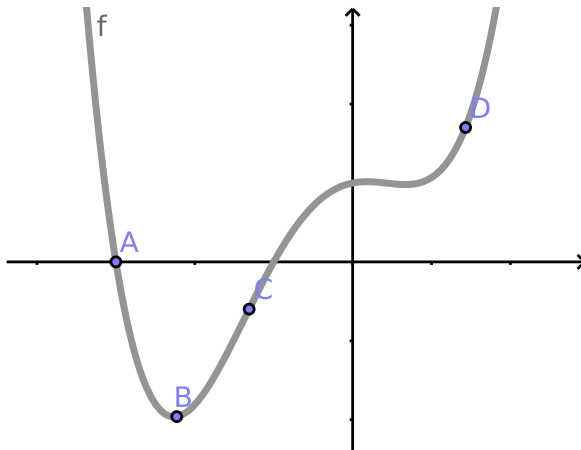
Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^3 + x^2$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
Zudem sind folgende drei Funktionsgraphen gegeben.



- Nur einer der gegebenen Graphen bildet die Funktion  $f$  ab. Bestimmen Sie diesen und begründen Sie, warum die anderen beiden keine Graphen von  $f$  sein können.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von  $f$  und der x-Achse im Intervall  $[-1; 1]$ .

### 1.2 Analysis 2

Gegeben ist eine Abbildung des Graphen der Funktion  $f$  mit den Punkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ .

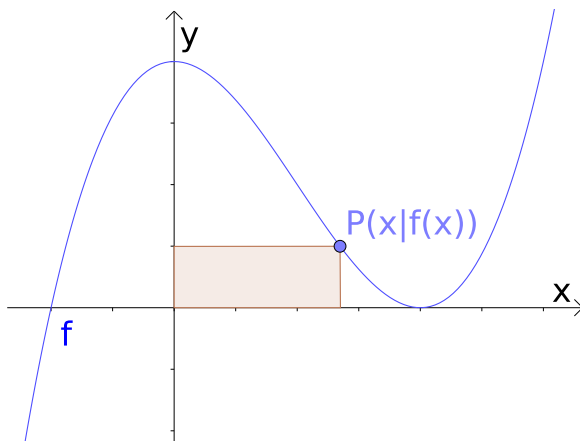


- a) Geben Sie an, ob die Funktionswerte der Ableitung an den Stellen der Punkte positiv, negativ oder null sind.
- b) Gegeben seien die bestimmten Integrale  $i_1 = \int_{x_A}^{x_C} f(x) dx$  und  $i_2 = \int_{x_C}^{x_D} f(x) dx$ .  
Entscheiden und begründen Sie, ob  $i_1 < i_2$  gilt.

### 1.3 Analysis 3

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 2$

- a) Bestimmen Sie die beiden Extremstellen der Funktion.
- b) Jeder Punkt  $P$  auf dem Graphen von  $f$  im Intervall  $[0; 2]$  bildet ein Rechteck mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie, ob für den Wert  $x = 1$  der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal wird.



# Abitur 2021 (Musterlösung)

## 1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

### 1.1 Analysis 1

- a) Anhand der Funktionsgleichung kann man feststellen, dass  $f(x) > 0$  für alle  $x > 0$  gelten muss.
- (1) Der erste Graphen ist jedoch für  $x > 0$  negativ, sodass dieser Graph nicht zu  $f$  gehört.
  - (2) Die Steigung dieses Graphen ist z. B. für  $x \geq 0$  konstant, während dies nicht der Fall ist für die Steigung des Graphen von  $f$ . Die Ableitung von  $f$  ist nämlich  $f'(x) = 3x^2 + 2x$  und somit nicht konstant für  $x \geq 0$ .
  - (3) Dies ist der Graph von  $f$ .
- b) Zunächst bestimmen wir die Stammfunktion  $F$  von  $f$ :

$$F(x) = \int (x^3 + x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$

Da der Funktionsgraph in dem gegebenen Intervall über der x-Achse liegt, ist es nicht nötig die Teilflächen einzeln zu berechnen. Der Flächeninhalt beträgt:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= F(1) - F(-1) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \left( \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \text{ FE} \end{aligned}$$

### 1.2 Analysis 2

- a) Für die Ableitung gelten folgende Regeln:
- Wenn der Graph einer Funktion in einem Intervall (streng monoton) steigend ist, dann gilt für die Ableitung  $f'(x) > 0$  für alle  $x$  in diesem Intervall.
  - Wenn der Graph einer Funktion in einem Intervall (streng monoton) fallend ist, dann gilt für die Ableitung  $f'(x) < 0$  für alle  $x$  in diesem Intervall.
  - Für ein Extremum  $x_E$  muss die Ableitung eine Nullstelle haben, also gilt  $f'(x) = 0$ .

Entsprechend gilt für die einzelnen Punkte:

- Bei  $A$  ist der Graph fallend, also ist  $f'(x_A) < 0$
- Bei  $B$  hat der Graph ein Extremum, also ist  $f'(x_B) = 0$
- Bei  $C$  ist der Graph steigend, also ist  $f'(x_C) > 0$
- Bei  $D$  ist der Graph steigend, also ist  $f'(x_D) > 0$

b) Die Aussage  $i_1 < i_2$  stimmt.

Die Fläche zwischen dem Funktionsgraph und der x-Achse im Intervall  $[x_A; x_C]$  liegt komplett unterhalb der x-Achse, sodass das Integral  $i_1 < 0$  sein muss. Die Fläche im Intervall  $[x_C; x_D]$  hat nur ein kleines Stück unterhalb der x-Achse, während der überwiegende Teil oberhalb verläuft. Dadurch ist  $i_2 > 0$ . Also gilt  $i_1 < 0 < i_2$ .

### 1.3 Analysis 3

a) Zunächst bilden wir die Ableitung für  $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 2$ :

$$f'(x) = 1,5x^2 - 3x$$

Für die Extremstelle muss die Ableitung gleich null gesetzt werden. Notwendiges Kriterium für Extremstellen:  $x_E \Leftrightarrow f'(x_E) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 1,5x^2 - 3x &= 0 \\ x \cdot (1,5x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem Satz vom Nullprodukt ergibt sich  $x_1 = 0$  und  $1,5x - 3 = 0$ .

$$\begin{array}{rcl} 1,5x - 3 = 0 & & | + 3 \\ 1,5x = 3 & & | : 1,5 \\ x_2 = 2 & & \end{array}$$

Da gegeben ist, dass die Funktion zwei Extremstellen hat und die einzigen Kandidaten  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 2$  sind, kann auf die hinreichende Bedingung verzichtet werden.

b) Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot f(x) = 0,5x^4 - 1,5x^3 + 2x$$

Ableitung bilden:

$$A'(x) = 2x^3 - 4,5x^2 + 2$$

Für den maximalen Flächeninhalt muss die Flächeninhaltsfunktion dort ein Extremum besitzen. Deshalb muss auch gelten  $A'(x_{max}) = 0$  (notwendiges Kriterium).

Allerdings gilt:  $A'(1) = 2 - 4,5 + 2 = 0,5 \neq 0$ . Bei  $x = 1$  ist der Flächeninhalt des Rechtecks nicht maximal.