MATHEMATIK ABITUR 2022

GRUNDKURS

BERLIN UND BRANDENBURG

PRÜFUNGEN UND LÖSUNGEN

Inhalt

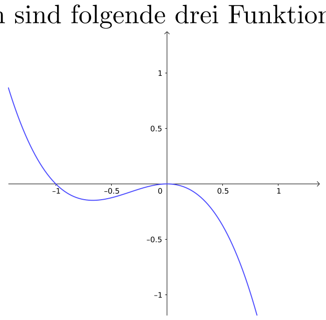
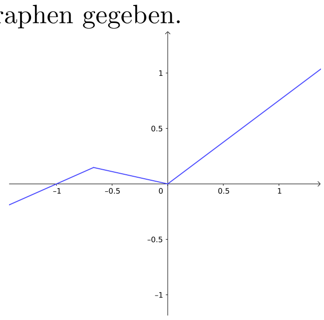
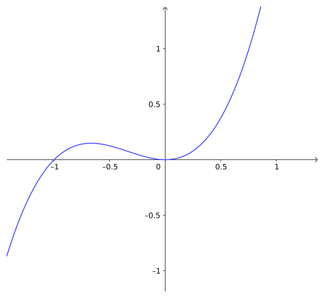
Abitur 2021 (Musterklausur)

Im Abitur 2021 konnte die Lehrkraft zwischen Analytischer Geometrie und Stochastik wählen. Die entsprechenden Aufgaben des abgewählten Themengebietes entfielen. ***Bearbeiten Sie die Aufgaben in Analysis und entweder die Aufgaben in Analytischer Geometrie oder die in Stochastik.***

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Zudem sind folgende drei Funktionsgraphen gegeben.

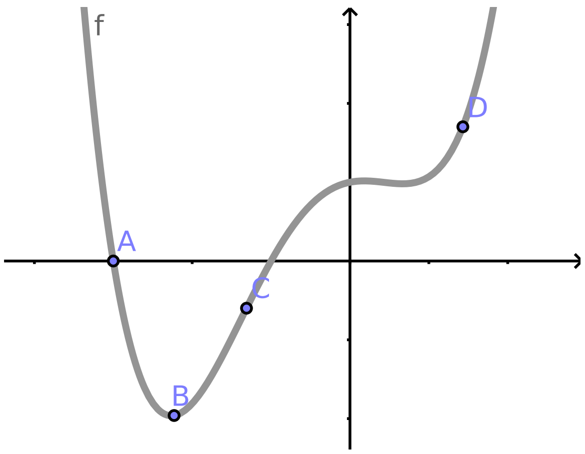
(1)  (2)  (3) 

a) Nur einer der gegebenen Graphen bildet die Funktion f ab. Bestimmen Sie diesen und begründen Sie, warum die anderen beiden keine Graphen von f sein können.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[-1; 1]$.

1.2 Analysis 2

Gegeben ist eine Abbildung des Graphen der Funktion f mit den Punkten A, B, C und D.



a) Geben Sie an, ob die Funktionswerte der Ableitung an den Stellen der Punkte positiv, negativ oder null sind.

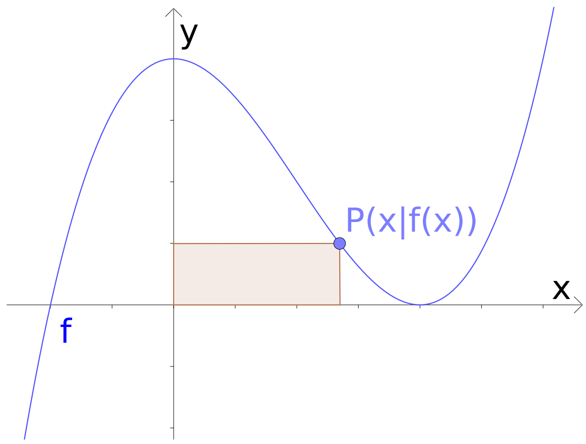
b) Gegeben seien die bestimmten Integrale $i_1 = \int_{x_A}^{x_C} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $i_2 = \int_{x_C}^{x_D} f(x)\,\mathrm{d}x$. Entscheiden und begründen Sie, ob $i_1 < i_2$ gilt.

1.3 Analysis 3

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 2$

a) Bestimmen Sie die beiden Extremstellen der Funktion.

b) Jeder Punkt P auf dem Graphen von f im Intervall $[0; 2]$ bildet ein Rechteck mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie, ob für den Wert $x = 1$ der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal wird.



Abitur 2021 (Musterlösung)

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

a) Anhand der Funktionsgleichung kann man feststellen, dass $f(x) > 0$ für alle $x > 0$ gelten muss.

(1) Der erste Graphen ist jedoch für $x > 0$ negativ, sodass dieser Graph nicht zu f gehört.

(2) Die Steigung dieses Graphen ist z. B. für $x \geq 0$ konstant, während dies nicht der Fall ist für die Steigung des Graphen von f. Die Ableitung von f ist nämlich $f'(x) = 3x^2 + 2x$ und somit nicht konstant für $x \geq 0$.

(3) Dies ist der Graph von f.

b) Zunächst bestimmen wir die Stammfunktion F von f:

$$F(x) = \int (x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$

Da der Funktionsgraph in dem gegebenen Intervall über der x-Achse liegt, ist es nicht nötig die Teilflächen einzeln zu berechnen. Der Flächeninhalt beträgt:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= F(1) - F(-1) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}\text{FE}
\end{aligned}$$

1.2 Analysis 2

a) Für die Ableitung gelten folgende Regeln:

- Wenn der Graph einer Funktion in einem Intervall (streng monoton) steigend ist, dann gilt für die Ableitung $f'(x) > 0$ für alle x in diesem Intervall.
- Wenn der Graph einer Funktion in einem Intervall (streng monoton) fallend ist, dann gilt für die Ableitung $f'(x) < 0$ für alle x in diesem Intervall.
- Für ein Extremum x_E muss die Ableitung eine Nullstelle haben, also gilt $f'(x) = 0$.

Entsprechend gilt für die einzelnen Punkte:

- Bei A ist der Graph fallend, also ist $f'(x_A) < 0$
- Bei B hat der Graph ein Extremum, also ist $f'(x_B) = 0$
- Bei C ist der Graph steigend, also ist $f'(x_C) > 0$
- Bei D ist der Graph steigend, also ist $f'(x_D) > 0$

b) Die Aussage $i_1 < i_2$ stimmt.

Die Fläche zwischen dem Funktionsgraph und der x-Achse im Intervall $[x_A; x_C]$ liegt komplett unterhalb der x-Achse, sodass das Integral $i_1 < 0$ sein muss. Die Fläche im Intervall $[x_C; x_D]$ hat nur ein kleines Stück unterhalb der x-Achse, während der überwiegende Teil oberhalb verläuft. Dadurch ist $i_2 > 0$. Also gilt $i_1 < 0 < i_2$.

1.3 Analysis 3

a) Zunächst bilden wir die Ableitung für $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 2$:

$$f'(x) = 1,5x^2 - 3x$$

Für die Extremstelle muss die Ableitung gleich null gesetzt werden. Notwendiges Kriterium für Extremstellen: $x_E \Leftrightarrow f'(x_E) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 1,5x^2 - 3x &= 0 \\ x \cdot (1,5x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem Satz vom Nullprodukt ergibt sich $x_1 = 0$ und $1,5x - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} 1,5x - 3 &= 0 && \mid +3 \\ 1,5x &= 3 && \mid : 1,5 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Da gegeben ist, dass die Funktion zwei Extremstellen hat und die einzigen Kandidaten $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ sind, kann auf die hinreichende Bedingung verzichtet werden.

b) Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot f(x) = 0,5x^4 - 1,5x^3 + 2x$$

Ableitung bilden:

$$A'(x) = 2x^3 - 4,5x^2 + 2$$

Für den maximalen Flächeninhalt muss die Flächeninhaltsfunktion dort ein Extremum besitzen. Deshalb muss auch gelten $A'(x_{max}) = 0$ (notwendiges Kriterium).

Allerdings gilt: $A'(1) = 2 - 4,5 + 2 = 0,5 \neq 0$. Bei $x = 1$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks nicht maximal.