MATHEMATIK ABITUR 2024

LEISTUNGSKURS

BERLIN UND BRANDENBURG

PRÜFUNGEN UND LÖSUNGEN

Inhalt

Vorwort

Liebe Schülerinnen und liebe Schüler,

in diesem Prüfungsheft stehen insgesamt die letzten drei Original-Abiturprüfungen des Mathematik Leistungskurses in Berlin und Brandenburg als Prüfungssimulationen (A bis C) zur Verfügung. Je nachdem, ob sich euer Kurs für die Prüfungen mit grafikfähigem Taschenrechner (CAS) entschieden hat oder ihr nur den normalen wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR) nutzen dürft, bearbeitet ihr nur die entsprechenden Aufgaben. Hinweis: In der echten Prüfung werden immer nur die Aufgaben eurer Taschenrechnervariante enthalten sein.

In den Jahren 2021 bis 2023 wurden aufgrund der Corona-Pandemie Sonderregeln eingeführt. Diese beinhalteten eine verlängerte Bearbeitungszeit sowie den Wegfall (bzw. Abwahl durch die Lehrkraft) eines Themengebiets, nämlich der Analytischen Geometrie oder der Stochastik. Zur besseren Vorbereitung empfehlen wir daher, alle drei Aufgabenbereiche (Analytische Geometrie und Stochastik) zu bearbeiten, auch wenn die Bearbeitungszeit in diesem Fall anders ist.

Am Tag vor der Prüfung lernst du nichts Neues mehr. Sorge für einen unaufgeregten Tag: Keine Druckbetankung mit Lernstoff, keine Partys und kein starker Medienkonsum. Geh zeitig ins Bett und schlaf dich aus.

Und vergiss nicht, befolge bei der Prüfungsvorbereitung immer die drei großen Buchstaben des Erfolgs:

T U N

Wir wünschen euch viel Erfolg bei euren Prüfungen!

Fehler gefunden? Auch wir können mal einen Fehler machen. Melde diese gerne unter: fehler@pruefungshefte.de

Dieses Lernheft wird bereitgestellt durch:

abitur-berlin.de / Prüfungshefte Verlag

Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Prüfungssimulation A

Original-Prüfung 2021

Hilfsmittel Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Hilfsmittel nicht für Aufgabenstellung 1: Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

CAS-Prüfungen: zugelassenes CAS, das an der Schule eingeführt ist. Bearbeite die zusätzlichen CAS bw. Stern-Aufgaben (*)

Bearbeitungszeit 300 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

In der Original-Prüfung wurde die Bearbeitungszeit um zusätzliche 30 Minuten (aufgrund der Corona-Pandemie) verlängert.

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten. Die Aufgabenstellung und die Lösungen zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 70 Minuten abgegeben.
Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen kann bereits zuvor begonnen werden.
In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 70 Minuten verwendet werden.

Corona-Regelung: In der Original-Prüfung konnte die Lehrkraft Stochastik oder Geometrie abwählen. Die Bearbeitungszeit wurde um 15 Minuten verlängert und betrug 85 Minuten.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie **oder** Stochastik

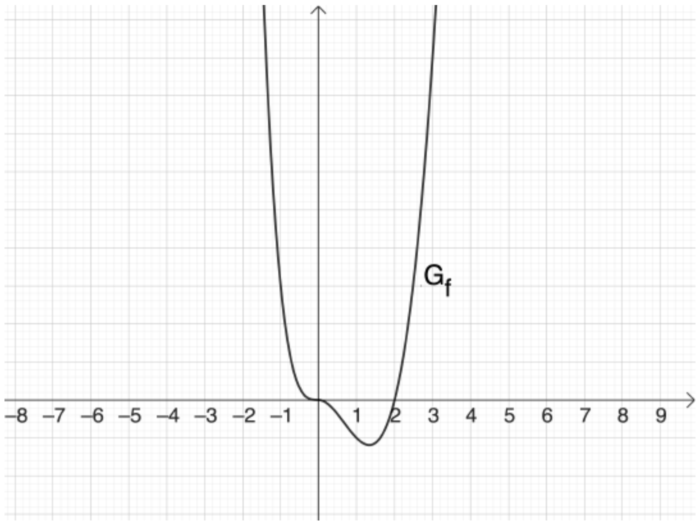
Hinweis: Bearbeiten Sie eine der beiden Aufgaben.

In der Original-Prüfung konnte die Lehrkraft eine der Aufgabenvorschläge abwählen.

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Die Achseneinteilung der y-Achse ist nicht bekannt.



Gegeben sind die folgenden drei Funktionsgleichungen:

I) $f_1(x) = x^2 \cdot (x^2 - 4)$

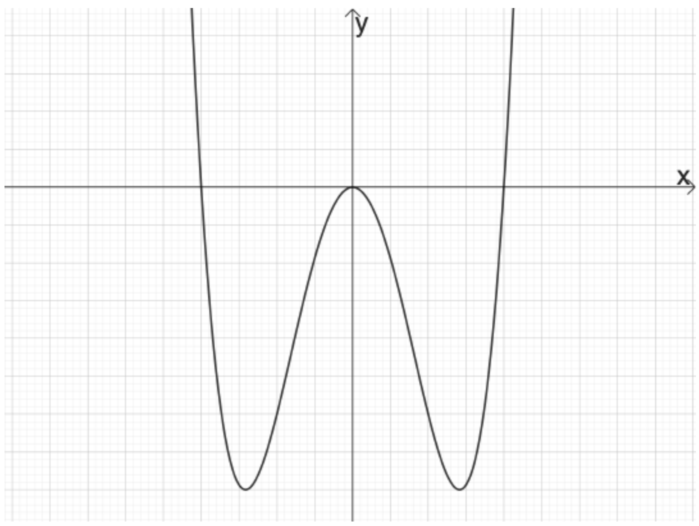
II) $f_2(x) = x \cdot (x^2 - 2x)$

III) $f_3(x) = x^3 \cdot (x - 2)$

a) Untersuchen Sie für jede der Funktionsgleichungen (I), (II) und (III), ob sie den abgebildeten Graphen G_f beschreiben kann. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

1.2 Analysis 2

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von f.



2 Analysis

2.1 Analysis: Brücke

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.

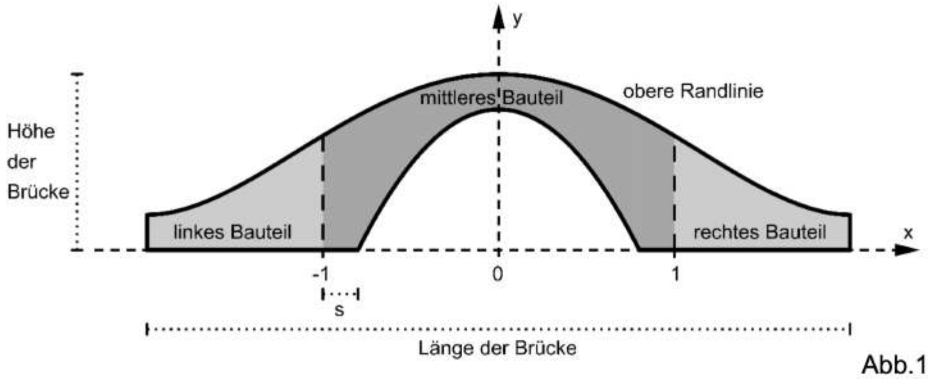


Abb.1

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1$ beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

1. a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch ist.

   b) Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke.
   (zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x-Koordinate 2.)

   c) Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet. Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt.

   d) Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie seinen Wert.

   e) Berechnen Sie die Größe des größten Steigungswinkels der Brücke, der beim Überfahren zu überwinden ist.

   Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion q mit $q(x) = 0,8 - a \cdot x^2$;
   $a \in \mathbb{R}, a > 0$ beschrieben werden.

   f) In der Abbildung 1 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit s bezeichnet. Bestimmen Sie alle Werte von a, die für diese Länge mindestens 0,1 dm liefern.

   g) Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen.

   h) Für die Brücke gilt $a = 1,25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt; $1\,\text{dm}^3$ des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist 0,4 dm breit.
   Ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils.

Abitur 2021 (Musterlösung)

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

a) Der Graph aus der Abbildung hat genau zwei Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

I) Die Funktion $f_1(x) = x^2 \cdot (x^2 - 4)$ hat neben $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ eine dritte Nullstelle bei $x_3 = -2$. Da dies bei der Ursprungsfunktion nicht der Fall ist, also $f(-2) \neq 0$, handelt es sich bei f_1 nicht um die gesuchte Funktion f.

II) f_2 ist ebenfalls keine Funktionsgleichung von f, da gilt $f_2(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

III) Damit kann f_3 eine Funktionsgleichung von f sein. Sie hat die gleichen Nullstellen wie f und das gleiche Grenzverhalten.

1.2 Analysis 2

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - k \cdot x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 2kx \\ &= 2x \cdot (2x^2 - k) \end{aligned}$$

b) Notwendige Bedingung für Extremstellen: $x_E \Leftrightarrow f'(x_E) - 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x \cdot (2x^2 - k) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist (Satz vom Nullprodukt). Also gilt $x_1 = 0$ und $2x^2 - k = 0$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - k &= 0 \quad | + k| : 2 \\ x^2 &= \frac{k}{2} \quad | \pm \surd \\ x_{2,3} &= \pm\sqrt{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Zwei Tiefpunkte können nicht aufeinander folgen, weshalb bei $x_1 = 0$ ein Hochpunkt liegen muss. Auf die hinreichende Bedingung kann daher verzichtet werden.

Laut Aufgabenstellung gilt $f\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = -1$

2 Analysis

2.1 Analysis: Brücke

1. a) Für Achsensymmetrie zur y-Achse muss gelten $f(x) = f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{20} \cdot (-x)^4 - \frac{2}{5} \cdot (-x)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Wir bestimmen die Ableitung von f.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{20} \cdot x^4 - \frac{2}{5} \cdot x^2 + 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x \end{aligned}$$

Für Extremstellen gilt $x_E \Leftrightarrow f'(x_E) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x &= 0 \\ \frac{1}{5}x \cdot (x^2 - 4x) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt $x_1 = 0$ und $x^2 - 4 = 0$. Also gilt $x_{2,3} = \pm 2$.
Der Hochpunkt des Graphen von f muss bei $x = 0$ (siehe auch Skizze) liegen, da der Graph achsensymmetrisch ist und die Tiefpunkte an den äußeren Endpunkten der Brücke, also bei -2 und +2, liegen.
Die y-Koordinate des Hochpunkts entspricht der Höhe der Brücke:
$f(0) = \frac{1}{20} \cdot 0^4 - \frac{2}{5} \cdot 0^2 + 1 = 1$
Die Höhe beträgt also 1 dm.
Die Länge ist der Abstand der beiden Tiefpunkte von -2 bis 2 und beträgt daher 4 dm.

c) Die Höhe des höchsten Punkts der oberen Randlinie beträgt $f(0) = 1$ und der niedrigste Punkt liegt am Tiefpunkt bei $f(2) = \frac{1}{5}$. Damit ergibt sich für die halbe Höhe:

$$\frac{f(0) + f(2)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{2} = \frac{3}{5}$$

Die Höhe des rechten Endpunkts des mittleren Bauteils beträgt:

$$f(1) = \frac{13}{20} \neq \frac{3}{5}$$

Der Übergangspunkt liegt also nicht auf halber Höhe der Brücke.

d) Der Term gibt die mittlere Steigung der oberen Randlinie für das rechte Bauteil an.

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1}{5} - \frac{13}{20} = -\frac{9}{20}$$

Die mittlere Steigung im Intervall $[1; 2]$ beträgt $-\frac{9}{20}$.