

MATHEMATIK ABITUR 2024

GRUNDKURS

BERLIN UND BRANDENBURG

PRÜFUNGEN UND
LÖSUNGEN

Inhalt

Vorwort	6
Abitur 2019 (Musterklausur)	7
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	8
1.1 Analysis 1	8
1.2 Analysis 2	8
1.3 Geometrie	8
1.4 Stochastik	8
2 Analysis	9
2.1 Analysis: Hormontherapie	9
2.2 Analysis: Bonsai-Bäume	11
3 Analytische Geometrie	13
3.1 Geometrie: Autobrücke	13
3.2 Geometrie: Rechteck im Würfel	14
4 Stochastik	15
4.1 Stochastik: Würfeln um Hausarbeit	15
4.2 Stochastik: Fahrscheinkontrolle	16
Abitur 2020 (Musterklausur)	17
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	18
1.1 Analysis 1	18
1.2 Analysis 2	18
1.3 Geometrie 1	18
1.4 Geometrie 2	18
1.5 Stochastik	18
2 Analysis	19
2.1 Analysis: Exponentialfunktion	19
2.2 Analysis: Offroad-Strecke	20
3 Analytische Geometrie	21
3.1 Geometrie: Ebenengleichungen	21
3.2 Geometrie: Pool	22
4 Stochastik	23
4.1 Stochastik: Farbige Würfel	23
4.2 Stochastik: IT-Unternehmen	24
Abitur 2021 (Musterklausur)	25
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	26
1.1 Analysis 1	26
1.2 Analysis 2	26
1.3 Analysis 3	26
1.4 Alternative 1: Geometrie	28
1.5 Alternative 2: Stochastik	29
2 Analysis	30

2.1	Analysis: Torbogen	30
2.2	Analysis: Engelsflüge	32
3	Analytische Geometrie oder Stochastik	34
3.1	Geometrie: Veranstaltungszelt	34
3.2	Stochastik: Gutschein-App	35
Abitur 2022 (Musterklausur)		36
1	Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	37
1.1	Analysis 1	37
1.2	Analysis 2	37
1.3	Analysis 3	37
1.4	Alternative 1: Geometrie	38
1.5	Alternative 2: Stochastik	39
2	Analysis	40
2.1	Analysis: Heißluftballon	40
2.2	Analysis: Rutsche	42
3	Analytische Geometrie oder Stochastik	45
3.1	Geometrie: Edelstein	45
3.2	Stochastik: Flüge	47
Abitur 2023 (Original-Prüfung)		48
1	Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	49
1.1	Analysis 1	49
1.2	Analysis 2	49
1.3	Analysis 3	50
1.4	Alternative 1: Geometrie	50
1.5	Alternative 2: Stochastik	51
2	Analysis	53
2.1	Analysis: Beistelltisch	53
2.2	Analysis: Temperatursteuerung	55
3	Analytische Geometrie oder Stochastik	57
3.1	Geometrie: Körper	57
3.2	Stochastik: Lehrkräfte	59
Abitur 2019 (Musterlösung)		60
1	Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	60
1.1	Analysis 1	60
1.2	Analysis 2	60
1.3	Geometrie	61
1.4	Stochastik	63
2	Analysis	64
2.1	Analysis: Hormontherapie	64
2.2	Analysis: Bonsai-Bäume	67
3	Analytische Geometrie	72
3.1	Geometrie: Autobrücke	72
3.2	Geometrie: Rechteck im Würfel	75
4	Stochastik	79
4.1	Stochastik: Würfeln um Hausarbeit	79
4.2	Stochastik: Fahrscheinkontrolle	81

Abitur 2020 (Musterlösung)	83
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	83
1.1 Analysis 1	83
1.2 Analysis 2	83
1.3 Geometrie 1	84
1.4 Geometrie 2	85
1.5 Stochastik	85
2 Analysis	87
2.1 Analysis: Exponentialfunktion	87
2.2 Analysis: Offroad-Strecke	91
3 Analytische Geometrie	95
3.1 Geometrie: Ebenengleichungen	95
3.2 Geometrie: Pool	98
4 Stochastik	101
4.1 Stochastik: Farbige Würfel	101
4.2 Stochastik: IT-Unternehmen	103
Abitur 2021 (Musterlösung)	105
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	105
1.1 Analysis 1	105
1.2 Analysis 2	105
1.3 Analysis 3	106
1.4 Alternative 1: Geometrie	107
1.5 Alternative 2: Stochastik	108
2 Analysis	110
2.1 Analysis: Torbogen	110
2.2 Analysis: Engelsflügel	117
3 Analytische Geometrie oder Stochastik	123
3.1 Geometrie: Veranstaltungszelt	123
3.2 Stochastik: Gutscheine-App	126
Abitur 2022 (Musterlösung)	129
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	129
1.1 Analysis 1	129
1.2 Analysis 2	129
1.3 Analysis 3	130
1.4 Alternative 1: Geometrie	131
1.5 Alternative 2: Stochastik	132
2 Analysis	134
2.1 Analysis: Heißluftballon	134
2.2 Analysis: Rutsche	139
3 Analytische Geometrie oder Stochastik	144
3.1 Geometrie: Edelstein	144
3.2 Stochastik: Flüge	148
Abitur 2023 (Musterlösung)	150
1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil	150
1.1 Analysis 1	150
1.2 Analysis 2	151
1.3 Analysis 3	151
1.4 Alternative 1: Geometrie	152
1.5 Alternative 2: Stochastik	154
2 Analysis	155
2.1 Analysis: Beistelltisch	155

2.2	Analysis: Temperatursteuerung	160
3	Analytische Geometrie oder Stochastik	166
3.1	Geometrie: Körper	166
3.2	Stochastik: Lehrkräfte	170

Vorwort

Liebe Schülerinnen und liebe Schüler,

in diesem Prüfungsheft stehen insgesamt fünf Prüfungssimulationen (A bis E) zur Verfügung. Darunter befindet sich die Original-Prüfung aus dem Jahr 2023 sowie vier Musterprüfungen, die an den Mathematik Grundkurs Abiturprüfungen der Vorjahre angelehnt sind.

In den Jahren 2021 bis 2023 wurden aufgrund der Corona-Pandemie Sonderregeln eingeführt. Diese beinhalteten eine verlängerte Bearbeitungszeit sowie den Wegfall (bzw. Abwahl durch die Lehrkraft) eines Themengebiets, nämlich der Analytischen Geometrie oder der Stochastik. Um eine authentische Simulation unter Prüfungsbedingungen durchzuführen, inklusive der vorgesehenen Bearbeitungszeit, sind daher die Prüfungen aus den Jahren 2019 und 2020 (also A und B) am besten geeignet.

Zur Vorbereitung sind die drei anderen Prüfungen ebenfalls sehr sinnvoll. Wir empfehlen jedoch, alle drei Aufgabenbereiche (Analytische Geometrie und Stochastik) zu bearbeiten, auch wenn die Bearbeitungszeit in diesem Fall anders ist.

Am Tag vor der Prüfung lernst du nichts Neues mehr. Sorge für einen unaufgeregten Tag: Keine Druckbetankung mit Lernstoff, keine Partys und kein starker Medienkonsum. Geh zeig ins BeO und schlaf dich aus.

Und vergiss nicht, befolge bei der Prüfungsvorbereitung immer die drei großen Buchstaben des Erfolgs:

T U N

Wir wünschen euch viel Erfolg bei euren Prüfungen!

Fehler gefunden? Auch wir können mal einen Fehler machen. Melde diese gerne unter:
fehler@pruefungshefte.de

Dieses Lernheft wird bereitgestellt durch:

abitur-berlin.de / Prüfungshefte Verlag
© 2023, L&K development GmbH, Berlin

Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Prüfungssimulation E

Original-Prüfung 2023

Hilfsmittel Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Hilfsmittel nicht für Aufgabenstellung 1: Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist
Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten
der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lözens von Gle-
ichungen verfügen

Bearbeitungszeit 255 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

*In der Original-Prüfung wurde die Bearbeitungszeit um zusätzliche 30 Minuten (aufgrund der
Corona-Pandemie) verlängert.*

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten. Die Aufgabenstellung und die Lösungen zum hilf-
smittelfreien Teil werden nach 60 Minuten abgegeben.
Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen kann bereits zuvor begonnen werden.
In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 60 Minuten verwendet
werden.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie **oder** Stochastik

Hinweis: Bearbeiten Sie eine der beiden Aufgaben.

In der Original-Prüfung konnte die Lehrkraft eine der Aufgabenvorschläge abwählen.

2 Analysis

2.1 Analysis: Beistelltisch

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = 0,5 \cdot (x^2 - 4) \cdot e^x$

Der Graph der Funktion f wird mit G bezeichnet.

Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = (0,5x^2 + x - 2) \cdot e^x$.

- Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ an.
- Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G mit den beiden Koordinatenachsen. Ein Punkt R und die drei Schnittpunkte sind die Eckpunkte einer Raute. Geben Sie die Koordinaten des Punktes R an.
- Zeigen Sie, dass der Graph G an der Stelle $x = -1 + \sqrt{5}$ eine waagerechte Tangente besitzt. Berechnen Sie den Funktionswert an dieser Stelle.
- Der Graph G hat genau zwei lokale Extrempunkte, von denen einer im II. und einer im IV. Quadranten liegt. Der Punkt $T(-1 + \sqrt{5} | f(-1 + \sqrt{5}))$ ist der Tiefpunkt von G.
Entscheiden Sie ohne weitere Rechnung, ob die folgenden Aussagen wahr sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
 - $f(-0,9 + \sqrt{5})$ ist kleiner als die y-Koordinate des Tiefpunktes.
 - $f'(-0,9 + \sqrt{5})$ ist größer als null.
- Geben Sie das Monotonieverhalten von f für $x \geq 0$ an.
- Der Graph G besitzt zwei Wendepunkte. Berechnen Sie die Koordinaten beider Wendepunkte auf zwei Nachkommastellen gerundet.
- Die Abbildung 1 zeigt einen Teil des Graphen G. Die Tangente an G im Wendepunkt W begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Die zu dieser Tangente senkrechte Gerade durch den Punkt W begrenzt mit den Koordinatenachsen ein weiteres Dreieck.

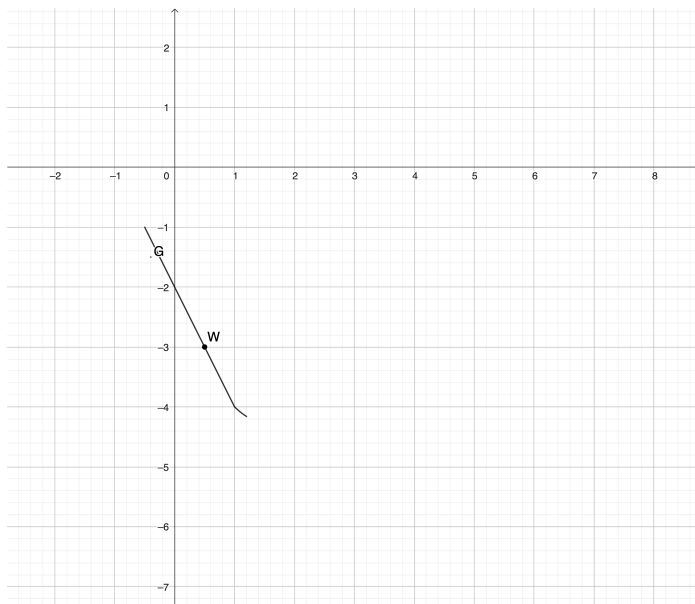


Abbildung 1

Zeichnen Sie in die Abbildung 1 beide Dreiecke ein. Begründen Sie mithilfe der Zeichnung, dass das eine Dreieck eine maßstäbliche Vergrößerung des anderen Dreiecks ist.

Abitur 2023 (Musterlösung)

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

- a) **Lösungsvorschlag I** Da der Graph von f symmetrisch zur y -Achse ist, liegen die beiden Tangenten t_1 und t_2 ebenfalls symmetrisch bezüglich der y -Achse. Beide Tangenten haben also denselben Schnittpunkt mit der y -Achse $(0|4)$ (also $n = 4$) und unterscheiden sich nur in der Steigung:

$$m_{t_2} = -m_{t_1} = \frac{4}{3}$$

Daraus ergibt sich dann die Tangentengleichung

$$t_2 : y = -\frac{4}{3}x + 4$$

Lösungsvorschlag II (Alternative) Die Tangente t_2 erhalten wir durch Spiegelung der Tangente t_1 an der y -Achse:

$$\begin{aligned} t_2(x) &= t_1(-x) \\ &= \frac{4}{3} \cdot (-x) + 4 \\ &= -\frac{4}{3}x + 4 \end{aligned}$$

- b) Das Dreieck besteht aus den drei Eckpunkten mit den Koordinatenachsen S_{x_1} (Schnittpunkt t_1 und x -Achse), S_{x_2} (Schnittpunkt t_2 und x -Achse), S_y (Schnittpunkt von t_1 , t_2 und y -Achse). Der Schnittpunkt $S_y(0|4)$ ist uns bekannt und kann einfach aus der Tangentengleichung abgelesen werden. Für S_{x_2} suchen wir die Nullstelle der Tangenten:

$$\begin{array}{rcl} t_1(x) & = & 0 \\ \frac{4}{3}x + 4 & = & 0 \qquad \qquad \qquad | -4 \\ \frac{4}{3}x & = & -4 \qquad \qquad \qquad | \cdot \frac{3}{4} \\ x & = & -3 \end{array}$$

Damit ist $S_{x_1}(-3|0)$. Aufgrund der Symmetrie von t_1 und t_2 gilt $S_{x_2}(3|0)$

Der Umfang berechnet sich aus den drei Teilstrecken zwischen den Punkten:

2 Analysis

2.1 Analysis: Beistelltisch

- a) Das Grenzwertverhalten bestimmt sich aus dem Term e^x , da dieser schneller ansteigt als der Term in der Klammer.

$$f(x) = 0,5 \cdot (x^2 - 4) \cdot e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

- b) Schnittpunkte mit der x-Achse liegen vor, wenn die y-Koordinate null ist.

Wir berechnen zunächst die Nullstellen.

$$0,5 \cdot (x^2 - 4) \cdot e^x = 0$$

Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist (Satz vom Nullprodukt). Der Teil $0,5 \cdot e^x$ wird nie 0. Also betrachten wir nur den ersten Teil der Gleichung:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 & | + 4 \\ x^2 &= 4 & | \pm \sqrt{} \\ x_1 &= 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind also $S_{x_1}(2|0)$ und $S_{x_2}(-2|0)$

Nun bestimmen wir noch den Schnittpunkt mit der y-Achse. Dieser liegt vor, wenn die x-Koordinate null ist. Hierzu berechnen wir $f(0)$.

$$f(0) = 0,5 \cdot (0^2 - 4) \cdot e^0 = 0,5 \cdot (-4) \cdot 1 = -2$$

Der Graph von f hat also einen Schnittpunkt mit der y-Achse bei $S_y(0|-2)$.

Eine Raute ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten. Damit ergibt sich für den vierten Eckpunkt der Raute $R(0|2)$.

- c) Zunächst berechnen wir die Steigung $f'(x)$ an der Stelle $x = -1 + \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (0,5 \cdot x^2 + x - 2) \cdot e^x \\ f'(-1 + \sqrt{5}) &= \left(0,5 \cdot (-1 + \sqrt{5})^2 + (-1 + \sqrt{5}) - 2 \right) \cdot e^{(-1 + \sqrt{5})} \\ &= \left(0,5 \cdot (1 - 2\sqrt{5} + 5) - 1 + \sqrt{5} - 2 \right) \cdot e^{(-1 + \sqrt{5})} \\ &= \left(0,5 - \sqrt{5} + 2,5 - 3 + \sqrt{5} \right) \cdot e^{(-1 + \sqrt{5})} \\ &= 0 \cdot e^{(-1 + \sqrt{5})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Steigung an der Stelle $x = -1 + \sqrt{5}$ beträgt null, d. h. die Tangente an dem Graphen von f an dieser Stelle muss waagrecht (= keine Steigung) sein.

Nun berechnen wir noch den Funktionswert: